الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ؛

نعتبر النقط $A\left(2;4;1\right)$ ، $B\left(0;4;-3\right)$ ، $C\left(3;1;-3\right)$ و $D\left(1;0;-2\right)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية:

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

3) النقطة $E\left(3;2;-1\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي $\left(ABC\right)$.

4) المستقيمان $\left(AB\right)$ و $\left(CD\right)$ من نفس المستوي.

5) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \\ z=-t-1 \end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $\left(CD\right)$.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\left\{\left(A;\alpha\right),\left(B;\beta\right)\right\}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث: $z_A=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A) .

1) أ) اكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة $\left(\gamma\right)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

جـ) أنشئ الدائرة $\left(\gamma\right)$ والنقط A ، B و C .

2) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

جـ) عيّن وأنشئ $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left|z\right|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$.

3) أ) عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A.

ب) أثبت أنّ صورة $\left(E\right)$ بالدوران r هي محور القطعة $\left[OB\right]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) f الدالة المعرّفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$.

1) أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3؛ v_0، v_1، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) أ) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث: $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) أ) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ؛ ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		04 نقاط
1. صحيح : $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)\not\parallel\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$	0,75	
2. صحيح : إحداثيات النقط تحقق المعادلة $2x+2y-z-11=0$	0,75	
3. خطأ : الشعاع $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$ ليس ناظميا للمستوي (ABC)	0,75	
4. خطأ : D لا تنتمي إلى المستوي (ABC)	0,5	
5. صحيح : إحداثيات النقطتين C و D تحقق التمثيل الوسيطي	0,75	
6. صحيح : لأن النقط A، B، I في استقامية أو $(3\overrightarrow{IA}+7\overrightarrow{IB}=\vec{0})$	0,5	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		05 نقاط
1. أ - $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_C=2e^{i\frac{3\pi}{2}}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	1	
ب - $\|z_A\|=\|z_B\|=\|z_C\|=2$ إذاً A، B و C تنتمي إلى (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2	0,5	
جـ - الإنشاء	0,5	
2. أ - التحقق أن: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$	0,75	
ب - المثلث متقايس الأضلاع ($AB=BC$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB})=-\frac{\pi}{3}$)	0,5	
O مركز ثقله ($z_A+z_B+z_C=0$ أو مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله)	0,25	
جـ - (E) هي محور $[OA]$ مع الإنشاء	0,75	
3. أ - $\frac{z_A}{z_C}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذاً $\frac{2\pi}{3}$ زاوية للدوران r.	0,5	
ب - $r(A)=B$ و $r(O)=O$ و r يحافظ على المنتصفات وعلى التعامد ومنه صورة (E) هي محور $[OB]$ بـــ r أو أية طريقة أخرى.	0,25	
التمرين الثالث: (05 نقاط)		03 نقاط
I) 1. f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$	0,5	
2. $f(x)-x=\frac{-x^2+3x+1}{x+1}$ ؛ $f(\alpha)=\alpha$ حيث $\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. على $[0;\alpha[$ ، (C_f) فوق (D) ؛ وعلى $]\alpha;+\infty[$ ، (C_f) تحت (D) ويتقاطعان في $A(\alpha;\alpha)$.	0,5	
3. الرسم	0,75	
II) 1. أ - تمثيل الحدود	0,75	
ب - (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة ؛ (v_n) متناقصة تماما ومتقاربة	0,5	

تابع للموضوع الثاني — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
2. أ - إثبات بالتراجع لكل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ أو أية طريقة أخرى	0,5	02 نقاط
ب - استنتاج اتجاه التغير	0,5	
3. أ - إثبات $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$	0,25	
ب - تبيان $0 < v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	0,25	
جـ - استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$	0,25	
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$	0,25	
التمرين الرابع (06 نقاط)		06 نقاط
I) 1. $g'(x) = -2\left(1+e^{2x-2}\right) < 0$ ومنه g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$	0,75	
2. g مستمرة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$	0,5	
$g(0,36) \approx 0,002$ ؛ $g(0,37) \approx -0,02$	0,5	
3. $g(x) < 0$ لمّا $x \in]\alpha;+\infty[$ و $g(x) > 0$ لمّا $x \in]-\infty;\alpha[$ و $g(\alpha) = 0$	0,5	
II) 1. أ - $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$	0,5	
ب - $g(-x) < 0$ لمّا $x \in]-\infty;-\alpha[$ و $g(-x) > 0$ لمّا $x \in]-\alpha;+\infty[$ و $f'(-\alpha) = 0$	0,25	
f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.	0,25	
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	0,5	
جدول التغيرات	0,25	
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + x - 1) = 0$	0,25	
(C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -x + 1$	0,25	
4. (C_f) فوق (Δ) على $[0;+\infty[$ وتحته على $]-\infty;0]$	0,25	
5. إنشاء (Δ) و (C_f)	0,5	
6. أ - لكل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$	0,5	
ب - $F(x) = \frac{1}{2}\left[-f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2}\right]$ أي $F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ حيث: F دالة أصلية لـــ f على $\mathbb{R}$.	0,25	

ملاحظة: تقبل وتراعى جميع الطرق الصحيحة الأخرى مع التقيد التام بسلم التنقيط.